Matemática Finita - Código 1342

4º **Teste Formativo**

1ª **parte**

I

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) está correcta. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma das suas respostas, basta escrever "Anulado" junto a essa resposta e indicar, se for caso disso, a que pretenda que seja considerada.

1. Se $a_k = (-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}$, então Δa_k é:

☐ **a)** $(-1)^k\left(\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}\right)$

☐ **b)** $(-1)^k\binom{n}{k}$

☐ **c)** $((-1)^k - (-1)^{k-1})\left(\binom{n-1}{k} - \binom{n-1}{k-1}\right)$

☐ **d)** $(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}$

2. Para $n > 0$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i} =$

☐ **a)** $(-2)^n$

☐ **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i 2^i$

☐ **c)** 0

☐ **d)** $\displaystyle 2\sum_{\substack{i=0\\ i\,par}}^{n}\binom{n}{i}$

3. Considere duas sucessões $\langle a_n\rangle$ e $\langle b_n\rangle$ definidas recursivamente pelo sistema $\begin{cases} a_n = b_{n-1} - 2a_{n-1} \\ b_n = 3b_{n-1} - a_{n-1} \end{cases}$, $n \geq 1$. Sabendo que $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, então:

☐ **a)** $b_{n+1} = b_n + 5b_{n-1}$ para todo $n \geq 1$

☐ **b)** $a_n + b_n = -3^{n+1} + 5 \cdot 2^n$ para todo n

☐ **c)** $a_n = b_n$ para todo n

☐ **d)** $a_{2n+1} = -1$ para todo n

4. Qual é o desenvolvimento em série da função (geradora) $\dfrac{t+1}{t^2-4t+4}$?

☐ **a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3n2^n t^n$

☐ **b)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3n}{2^{n+2}} t^n$

☐ **c)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3n}{2^{n}} t^n$

☐ **d)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2+3n)2^n t^n$

2ª parte

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter

5. Explicite as parcelas do seguinte somatório e calcule o valor final:

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=1}^{i} \frac{i}{i+j}$.

b) $\displaystyle\sum_{S\subseteq[3]}\sum_{T\subseteq S} \#(S\setminus T)$.

6. Use o método da perturbação para calcular as duas somas seguintes:

a) $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}$.

b) $T_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i} i$.

7. Considere o triplo somatório

$$\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=k}^{3}\sum_{i=j}^{3} \alpha_{ijk}\,.$$

a) Explicite este somatório para $n = 3$.

b) Troque a ordem dos somatórios de modo a que o promeiro índice seja i, o segundo seja k e o terceiro seja j.

8.

a) Calcule a soma $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij$.

b) Mostre que $2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + \sum_{i=1}^{n} i^2$.

c) Calcule a soma $\sum_{i=1}^{n} i^3$ aplicando o método da expansão-contracção à soma $\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2+i}{2}$.

9. Considere a sucessão $\langle d_n \rangle$ definida por $d_0 = 1$ e por $d_n = nd_{n-1} + 1$, para $n \geq 1$.

a) Mostre, por indução matemática, que $d_n = n!\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

b) Obtenha a igualdade acima pelo método da substituição de diante para trás.

10. Designe por a_n o número de maneiras distintas de pavimentar uma superfície rectangular de dimensões 2 por n com azulejos de dimensões de 2 por 2 (todos iguais) e 1 e por 2 (também todos iguais). Determine uma relação de recorrência para a sucessão $< a_n >_{n\geq 1}$ e use-a para explicitar o termo geral a_n.

11.

a) Prove que, se $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ e $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, então $B(t)C(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ onde

$$p_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n-2k} c_k$$

para todo o natural n.

b) Encontre uma forma fechada para a série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ cujo n-ésimo coeficiente é

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{r}{k}\binom{r}{n-2k}$$

onde r é um número natural n.

12. Seja $< a_n >$ uma sucessão de números reais e seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a série formal que lhe está associada.

a) Verifique que $P(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A(-t)]$ é a série formal que está associada à sucessão $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \ldots$.

b) Verifique que $I(t) = \frac{1}{2}[A(t) - A(-t)]$ é a série formal que está associada à sucessão $0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \ldots$.

c) Utilize as alíneas anteriores para provar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} t^n = \frac{t}{1-3t+t^2} \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} t^n = \frac{1-t}{1-3t+t^2}$$

- recorde que $< F_n >$ é a sucessão dos números de Fibonacci.

FIM