

# Matemática Finita - Código 1342

## Resolução do 4º Teste Formativo

1. A resposta correcta é a b). De facto,

$$\begin{aligned}\Delta a_k &= a_{k+1} - a_k = (-1)^k \binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \\ &= (-1)^k \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] = (-1)^k \binom{n}{k}.\end{aligned}\quad (\text{Lei de Pascal})$$

2. A resposta correcta é a c). De facto,

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i = (-1+1)^n = 0. \quad (\text{Binómio de Newton})$$

3. A resposta correcta é a a). De facto, da segunda equação resulta que  $a_{n-1} = -b_n + 3b_{n-1}$ . Substituindo na primeira equação vem  $-b_{n+1} + 3b_n = b_{n-1} - 2(-b_n + 3b_{n-1})$  e, portanto,

$$b_{n+1} = b_n + 5b_{n-1},$$

para todo  $n \geq 1$ .

Note que os primeiros 5 termos de cada uma destas sucessões são:

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 4, a_3 = -1, a_4 = 19, a_5 = 14,$$

$$b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 7, b_3 = 17, b_4 = 52, b_5 = 137,$$

pelo que b), c) , d) são afirmações falsas.

4. A resposta correcta é a b). De facto,

$$\begin{aligned}\frac{t+1}{t^2 - 4t + 4} &= \frac{t+1}{(t-2)^2} = \frac{t+1}{(-2(1-\frac{1}{2}t))^2} = \frac{t+1}{4} \frac{1}{(1-\frac{1}{2}t)^2} \\ &= \frac{t+1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{2+n-1}{n} t^n = \frac{t+1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} t^n \quad (\text{mud. de var. } n+1 \rightsquigarrow n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+n+1}{2^{n+2}} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3n}{2^{n+2}} t^n\end{aligned}$$

Alternativa: Como antes, temos

$$\frac{t+1}{t^2 - 4t + 4} = \frac{1}{4} \frac{t+1}{(1 - \frac{1}{2}t)^2}.$$

Pelo teorema das fracções parcias, sabemos que existem  $\alpha$  e  $\beta$  tais que

$$\frac{t+1}{(1 - \frac{1}{2}t)^2} = \frac{\alpha}{(1 - \frac{1}{2}t)^2} + \frac{\beta}{1 - \frac{1}{2}t} = \frac{\alpha + \beta(1 - \frac{1}{2}t)}{(1 - \frac{1}{2}t)^2} = \frac{(\alpha + \beta) - \frac{\beta}{2}t}{(1 - \frac{1}{2}t)^2}.$$

Sendo assim, tem de ser  $\alpha = 3$  e  $\beta = -2$ , logo

$$\begin{aligned} \frac{t+1}{(1 - \frac{1}{2}t)^2} &= \frac{3}{(1 - \frac{1}{2}t)^2} - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}t} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \binom{2+n-1}{n} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+1)-2}{2^n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n} t^n. \end{aligned}$$

Dividindo por 4, concluímos que

$$\frac{t+1}{t^2 - 4t + 4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{2^{n+2}} t^n.$$

**5. a)** Temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^i \frac{i}{i+j} &= \sum_{j=1}^0 \frac{0}{0+j} + \sum_{j=1}^1 \frac{1}{1+j} + \sum_{j=1}^2 \frac{2}{2+j} + \sum_{j=1}^3 \frac{3}{3+j} \\ &= 0 + \frac{1}{1+1} + \left( \frac{2}{2+1} + \frac{2}{2+2} \right) + \left( \frac{3}{3+1} + \frac{3}{3+2} + \frac{3}{3+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} = \frac{211}{60}. \end{aligned}$$

**b)** Temos

$$\begin{aligned} \sum_{S \subseteq [3]} \sum_{T \subseteq S} \#(S \setminus T) &= \sum_{T \subseteq \emptyset} \#(\emptyset \setminus T) + \sum_{T \subseteq \{1\}} \#(\{1\} \setminus T) + \sum_{T \subseteq \{2\}} \#(\{2\} \setminus T) \\ &+ \sum_{T \subseteq \{3\}} \#(\{3\} \setminus T) + \sum_{T \subseteq \{1,2\}} \#(\{1,2\} \setminus T) + \sum_{T \subseteq \{1,3\}} \#(\{1,3\} \setminus T) \\ &+ \sum_{T \subseteq \{2,3\}} \#(\{2,3\} \setminus T) + \sum_{T \subseteq \{1,2,3\}} \#(\{1,2,3\} \setminus T) = \#\emptyset + (\#\{1\} + \#\emptyset) \\ &+ (\#\{2\} + \#\emptyset) + (\#\{3\} + \#\emptyset) + (\#\{1,2\} + \#\{1\} + \#\{2\} + \#\emptyset) \\ &+ (\#\{1,3\} + \#\{1\} + \#\{3\} + \#\emptyset) + (\#\{2,3\} + \#\{2\} + \#\{3\} + \#\emptyset) \\ &+ (\#\{1,2,3\} + \#\{2,3\} + \#\{1,3\} + \#\{1,2\} + \#\{3\} + \#\{2\} + \#\{1\} + \#\emptyset) \\ &= 0 + 3(1+0) + 3(2+1+1+0) + (3+2+2+2+1+1+0) = 27. \end{aligned}$$

**6. a)** Por um lado,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= (-1)^{n+1-0} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \\
&= (-1)^{n+1} + \sum_{i=0}^n (-1)^{n+1-(i+1)} && (\text{mud. de var. } i \rightsquigarrow i+1) \\
&= (-1)^{n+1} + \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} = (-1)^{n+1} + S_n.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^{n+1-i} + (-1)^{n+1-(n+1)} = \sum_{i=0}^n (-1)(-1)^{n-i} + (-1)^0 = -S_n + 1.$$

Segue-se que  $(-1)^{n+1} + S_n = -S_n + 1$ , donde

$$S_n = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2} = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

**b)** Por um lado,

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= (-1)^{n+1-0} 0 + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} i \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^{n+1-(i+1)} (i+1) && (\text{mud. de var. } i \rightsquigarrow i+1) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} i + \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} = T_n + S_n \\
&= T_n + \frac{1 + (-1)^n}{2}. && (\text{por a)})
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n+1-i} i + (-1)^{n+1-(n+1)} (n+1) \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)(-1)^{n-i} i + (n+1) = -T_n + (n+1).
\end{aligned}$$

Segue-se que  $T_n + \frac{1+(-1)^n}{2} = -T_n + (n+1)$ , donde

$$T_n = \frac{2n+2-1-(-1)^n}{4} = \frac{2n+1-(-1)^n}{4}.$$

**7. a)** Para  $n = 3$ , o somatório é

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^3 \sum_{j=k}^3 \sum_{i=j}^3 \alpha_{ijk} = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=j}^3 \alpha_{ij1} + \sum_{j=2}^3 \sum_{i=j}^3 \alpha_{ij2} + \sum_{j=3}^3 \sum_{i=j}^3 \alpha_{ij3} \\
&= \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_{i11} + \sum_{i=2}^3 \alpha_{i21} + \sum_{i=3}^3 \alpha_{i31} \right) + \left( \sum_{i=2}^3 \alpha_{i22} + \sum_{i=3}^3 \alpha_{i32} \right) + \sum_{i=3}^3 \alpha_{i33} \\
&= [(\alpha_{111} + \alpha_{211} + \alpha_{311}) + (\alpha_{221} + \alpha_{321}) + \alpha_{331}] + [(\alpha_{222} + \alpha_{322}) + \alpha_{332}] + \alpha_{333} \\
&= \alpha_{111} + \alpha_{211} + \alpha_{311} + \alpha_{221} + \alpha_{321} + \alpha_{331} + \alpha_{222} + \alpha_{322} + \alpha_{332} + \alpha_{333}.
\end{aligned}$$

**b)** Usando a notação de Iverson, temos

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \sum_{j=k}^n \sum_{i=j}^n \alpha_{ijk} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_{ijk} \|k \leq j\| \|j \leq i\| \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ijk} \|k \leq j\| \|j \leq i\| = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \sum_{j=k}^i \alpha_{ijk}
\end{aligned}$$

uma vez que  $\|k \leq j\| \|j \leq i\| = \|k \leq j \leq i\| = \|k \leq i\| \|k \leq j \leq i\|$  (verifique).

**8. a)** Temos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \left( \sum_{i=1}^n i \right) \left( \sum_{j=1}^n j \right) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**b)** Em primeiro lugar, usando a lei da decomposição, deduzimos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i ij + \sum_{j=i+1}^n ij \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i ij + \sum_{j=i}^n ij - i^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i ij + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n ij - \sum_{i=1}^n i^2.
\end{aligned}$$

Mas

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n ij = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij \|i \leq j\| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j ij \|i \leq j\| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j ij = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i ij$$

(onde, na última igualdade, redenominámos as variáveis de indexação). Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i ij - \sum_{i=1}^n i^2$$

o que, usando a alínea (a), nos dá

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i ij = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \sum_{i=1}^n i^2.$$

c) Como

$$\frac{i^2 + i}{2} = \frac{i(i+1)}{2} = \sum_{j=1}^i j,$$

deduzimos que

$$\sum_{i=1}^n i \frac{i^2 + i}{2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i ij = \frac{1}{2} \left( \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \sum_{i=1}^n i^2 \right)$$

e, portanto,

$$\sum_{i=1}^n i(i^2 + i) = 2 \sum_{i=1}^n i \frac{i^2 + i}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \sum_{i=1}^n i^2.$$

Mas

$$\sum_{i=1}^n i(i^2 + i) = \sum_{i=1}^n i^3 + \sum_{i=1}^n i^2,$$

logo

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**9. a)**

$$d_0 = 0! \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} \quad (\text{Base de Indução})$$

é trivialmente verdadeira. Admitindo

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (\text{Hipótese de Indução})$$

provemos

$$d_{n+1} = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}. \quad (\text{Tese de Indução})$$

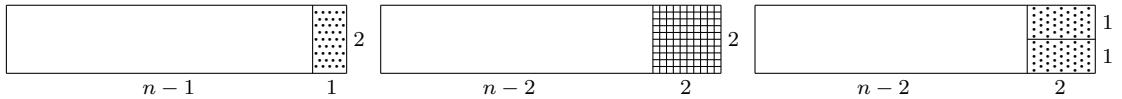
Tem-se

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (n+1)d_n + 1 = (n+1) \left( n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right) + 1 \quad (\text{por hip. de indução}) \\ &= (n+1)! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + 1 = (n+1)! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + (n+1)! \frac{1}{(n+1)!} \\ &= (n+1)! \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \right) = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

**b)** Aplicando o método da substituição de diante para trás, temos

$$\begin{aligned}
d_n &= nd_{n-1} + 1 = n((n-1)d_{n-2} + 1) + 1 = n(n-1)d_{n-2} + n + 1 \\
&= n(n-1)((n-2)d_{n-3} + 1) + n + 1 \\
&= n(n-1)(n-2)d_{n-3} + n(n-1) + n + 1 = \dots \\
&= (n(n-1) \cdots 2 \cdot 1)d_0 + (n(n-1) \cdots 3 \cdot 2) + \cdots + n(n-1) + n + 1 \\
&= n! + (n(n-1) \cdots 3 \cdot 2) + \cdots + n(n-1) + n + 1 \\
&= \sum_{k=0}^n n(n-1) \cdots (n-k+1) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

**10.** Temos, claramente,  $a_0 = a_1 = 1$ . Para  $n \geq 2$ , a parte terminal do pavimento pode ser constituída por: um azulejo  $1 \times 2$  colocado transversalmente, ou um azulejo  $2 \times 2$ , ou dois azulejos  $1 \times 2$ , colocados longitudinalmente.



No primeiro caso, os restantes azulejos pavimentam uma superfície  $2 \times (n-1)$  e, nos outros dois, os restantes azulejos pavimentam uma superfície  $2 \times (n-2)$ . Assim, a relação de recorrência pretendida é

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

O polinómio característico é  $p(t) = t^2 - t - 2 = (t-2)(t+1)$ , pelo que  $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$ . Dado que  $a_0 = 1 = a_1$ , obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3} \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

A solução da relação de recorrência é, pois,

$$a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}.$$

**11. a)** Tem-se

$$C(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n t^n$$

onde

$$c'_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é ímpar,} \\ c_{n/2}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Sendo assim,

$$p_n = \sum_{k=0}^n b_k c'_{n-k} = \sum_{k=0}^n b_{n-k} c'_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ é par}}} b_{n-k} c_{k/2} = \sum_{0 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n-2l} c_l = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n-2k} c_k$$

(a penúltima igualdade é verdadeira fazendo a substituição  $k = 2l$  e notando que  $0 \leq 2l \leq n$  se e só se  $0 \leq l \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ).

**b)** Usamos a alínea anterior com

$$B(t) = C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} t^n$$

(de modo que  $b_n = c_n = \binom{r}{n}$ ). Tem-se

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{r}{k} \binom{r}{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{r}{n-2k} \binom{r}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n-2k} c_k$$

e, portanto,

$$A(t) = B(t)C(t^2) = B(t)B(t^2).$$

Como  $\binom{r}{r+1} = \binom{r}{r+2} = \binom{r}{r+3} = \dots = 0$  (porque  $r+i > r$  para  $i \geq 1$ ), tem-se

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} t^n = \sum_{n=0}^r \binom{r}{n} t^n = (1+t)^r$$

(pelo binómio de Newton). Por conseguinte,

$$A(t) = B(t)B(t^2) = (1+t)^r (1+t^2)^r = [(1+t)(1+t^2)]^r = (1+t+t^2+t^3)^r.$$

**12. a)** Tem-se

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{1}{2}[A(t) + A(-t)] = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-t)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t^n \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + (-1)^n a_n] t^n \\ &= \frac{1}{2} (2a_0 + 2a_2 t^2 + 2a_4 t^4 + \dots) = a_0 + a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots \end{aligned}$$

e, portanto, a série formal  $P(t)$  está associada à sucessão  $a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots$

**b)** Tem-se

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{1}{2}[A(t) - A(-t)] = \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-t)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n t^n \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n - (-1)^n a_n] t^n \\ &= \frac{1}{2} (2a_1 t + 2a_3 t^3 + 2a_5 t^5 + \dots) = a_1 t + a_3 t^3 + a_5 t^5 + \dots \end{aligned}$$

e, portanto, a série formal  $I(t)$  está associada à sucessão  $0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots$

c) Pondo

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} t^n = F_0 + F_2 t + F_4 t^2 + F_6 t^3 + \dots ,$$

temos

$$A(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} t^{2n} = F_0 + F_2 t^2 + F_4 t^4 + F_6 t^6 + \dots$$

e, portanto, a série formal  $A(t^2)$  está associada à sucessão  $F_0, 0, F_2, 0, F_4, 0, \dots$ . Sendo assim, pela alínea a), tem-se

$$A(t^2) = \frac{1}{2}[F(t) + F(-t)]$$

onde

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = F_0 + F_1 t + F_2 t^2 + F_3 t^3 + \dots$$

é a série formal que está associada à sucessão dos números de Fibonacci. Como

$$F(t) = \frac{t}{1 - t - t^2},$$

obtemos

$$A(t^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{t}{1 - t - t^2} + \frac{-t}{1 + t - t^2} \right) = \frac{2t^2}{2(1 - 3t^2 + t^4)} = \frac{t^2}{1 - 3t^2 + t^4}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} t^n = A(t) = \frac{t}{1 - 3t + t^2}.$$

Por outro lado, pondo

$$B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} t^n = F_1 + F_3 t + F_5 t^2 + F_7 t^3 + \dots ,$$

temos

$$tB(t^2) = t \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} t^{2n+1} = F_1 t + F_3 t^3 + F_5 t^5 + F_7 t^7 + \dots$$

e, portanto, a série formal  $tB(t^2)$  está associada à sucessão  $0, F_1, 0, F_3, 0, F_5, 0, \dots$ . Sendo assim, pela alínea b), tem-se

$$\begin{aligned} tB(t^2) &= \frac{1}{2}[F(t) - F(-t)] = \frac{1}{2} \left( \frac{t}{1 - t - t^2} - \frac{-t}{1 + t - t^2} \right) \\ &= \frac{2(t - t^3)}{2(1 - 3t^2 + t^4)} = t \frac{1 - t^2}{1 - 3t^2 + t^4} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1} t^n = B(t) = \frac{1 - t}{1 - 3t + t^2}.$$

**FIM**