Matemática Finita - Código 1342

Resolução do 3º Teste Formativo

1. A resposta correcta é a a). De facto, se $A = A_1 \dot{\cup} A_2$, $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$ então A_1 terá entre 1 e $n-1$ objectos assim como A_2 e a escolha dos objectos para A_1 condiciona a de A_2. Portanto a resposta é:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k}}{2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1.$$

2. A resposta correcta é a d). De facto,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2n)!}{n!}\frac{1}{n!} = (2n)^{\underline{n}}\frac{1}{n!}.$$

3. A resposta correcta é a d). Se as letras fossem todas distintas teríamos 7! maneiras de formar palavras com sete letras. Mas cada palavra com 3 S's e 2 O's originaria $3! \cdot 2!$ sequências distintas se os S's e os O's fossem distintos. Quer dizer que se k denota o número de maneiras de re-arranjar as letras da palavra SOSSEGO, temos $k \times (3! \cdot 2!) = 7!$, ou seja que $k = \frac{7!}{3! \cdot 2!}$.

4. A resposta correcta é a b). Com efeito,

$$\begin{aligned}\Delta(iH_i) &= (i+1)H_{i+1} - iH_i = (i+1)\left(H_i + \frac{1}{i+1}\right) - iH_i \\ &= iH_i + H_i + \frac{i+1}{i+1} - iH_i = H_i + 1.\end{aligned}$$

5.

a) Existem $5! \cdot 5!$ maneiras de os rapazes se sentarem nos 5 lugares à esquerda, pois tanto os rapazes com as raparigas podem se permutar entre si.

b) Consideremos primeiro a disposição das raparigas e depois a dos rapazes. Existem 5! maneiras de dispôr as raparigas. Como os rapazes não podem ficar juntos existem 6 lugares possíveis para os rapazes se sentarem, e como são 5, podem ser dispostos de $6^{\underline{5}} = 6!$ maneiras. Portanto o número pedido é $5! \cdot 6!$.

<u>Alternativa:</u> Consideremos primeiro a disposição dos rapazes e depois a das raparigas. Existem 5! maneiras de dispôr os rapazes. Entre cada rapaz temos de sentar uma rapariga. Existem $\binom{5}{4} = 5$ maneiras de escolher uma rapariga de entre 5, para os 4 lugares, e elas têm 4! maneiras de se permutarem. A restante rapariga tem 6 lugares possíveis para se sentar. Portanto o número pedido é $5! \cdot \binom{5}{4} \cdot 4! \cdot 6 = 5! \cdot 6!$.

c) Como o Pancrácio e a Engrácia têm de ficar lado a lado podemos considerá-lo como um bloco de dois elementos que podem ser permutados de 2! maneiras e que têm 9 maneiras de se sentarem. Os restantes oito têm 8! maneiras de se sentarem. Portanto a resposta é $2 \cdot 9 \cdot 8! = 2 \cdot 9!$.

6.

a) O número de mãos existentes é exactamente o número de subconjuntos com 2 elementos de um conjunto com 52, isto é $\binom{52}{2}$.

b) Existem 4 naipes e cada naipe tem 13 cartas. Existem $\binom{13}{1} = 13$ maneiras de escolher uma carta entre 13. Para cada escolha, existem $\binom{4}{2}$ maneiras de escolher 2 naipes entre 4. Portanto o número de mãos de 2 cartas que formam um par é $13 \cdot \binom{4}{2} = 13 \cdot 6 = 78$.

c) Existem $\binom{4}{1} = 4$ maneiras de escolher um naipe entre 4. Para cada escolha fixa do naipe, existem $\binom{13}{3}$ maneiras de escolher 3 cartas entre 13. A restante carta tem de pertencer a outro naipe, isto é tem de ser escolhida entre $52 - 13 = 39$ cartas, e tem $\binom{39}{1} = 39$ escolhas possíveis. Portanto o número pedido é $4 \cdot \binom{13}{3} \cdot 39$.

7. Designemos por X o conjunto das palavras distintas que se podem escrever com todas as letras da palavra SANGUESSUGA, e consideremos os subconjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ \text{ palavras de } X : \text{ aparecem 3 } S\text{'s consecutivos } \}, \\ A_2 &= \{ \text{ palavras de } X : \text{ aparecem 2 } A\text{'s consecutivos } \}, \\ A_3 &= \{ \text{ palavras de } X : \text{ aparecem 2 } U\text{'s consecutivos } \}. \end{aligned}$$

Então o número pedido é $\#(X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#X - \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, uma vez que nem os três S's, nem os dois A's, nem os dois U's podem aparecer em bloco. Ora o princípio de inclusão/exclusão diz-nos que:

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = &(\#A_1 + \#A_2 + \#A_3) \\ &- [\#(A_1 \cap A_2) + \#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3)] \\ &+ \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3). \end{aligned}$$

Temos, agora, que contar os elementos de cada um destes conjuntos:

$$\#X = \frac{11!}{3!2!2!2!} \ , \ \#A_1 = \frac{9!}{2!2!2!} \ , \ \#A_2 = \#A_3 = \frac{10!}{3!2!2!} \ ,$$

$$\#(A_1 \cap A_2) = \#(A_1 \cap A_3) = \frac{8!}{2!2!} \ , \ \#(A_2 \cap A_3) = \frac{9!}{3!2!} \ ,$$

$$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{7!}{2}.$$

De facto, o cálculo de $\#X$ tem uma justificação idêntica à do exercício 3. Quanto a $\#A_1$, os 3 S's consecutivos funcionam como um bloco e, portanto, argumentamos para 9 letras com 2 A's, 2 U's e 2 G's. Quanto a $\#(A_1 \cap A_2)$, os 3 S's consecutivos funcionam como um bloco, os 2 A's consecutivos como outro bloco e, portanto, argumentamos para 8 letras com 2 U's e 2 G's. Analogamente se justificam as restantes contagens. Portanto o número pedido é

$$\frac{11!}{3!2!2!2!} - \frac{9!}{2!2!2!} - 2\frac{10!}{3!2!2!} + 2\frac{8!}{2!2!} + \frac{9!}{3!2!} - \frac{7!}{2}\,.$$

8. Para $n = 0$, $1 + \sum_{j=0}^{0} j(n+1)^{\underline{n-j}} = 1 + 0 = 1$, como se queria verificar (caso base). Suponhamos, agora, que se tem

$$(n+1)! = 1 + \sum_{j=0}^{n} j(n+1)^{\underline{n-j}} \qquad \text{(Hipótese de Indução)}$$

com vista a provar que

$$(n+2)! = 1 + \sum_{j=0}^{n+1} j(n+2)^{\underline{(n+1)-j}} \qquad \text{(Tese de Indução)}$$

Temos então

$$\begin{aligned}
(n+2)! = (n+2)(n+1)! &= (n+2)\left(1 + \sum_{j=0}^{n} j(n+1)^{\underline{n-j}}\right) \qquad \text{(por hip. de ind.)}\\
&= (n+2) + \sum_{j=0}^{n} j(n+2)(n+1)^{\underline{n-j}} = (n+2) + \sum_{j=0}^{n} j(n+2)^{\underline{n-j+1}}\\
&= 1 + (n+1) + \sum_{j=0}^{n} j(n+2)^{\underline{n-j+1}} = 1 + \sum_{j=0}^{n+1} j(n+2)^{\underline{(n+1)-j}}.
\end{aligned}$$

9.

a) Como $\mathcal{P}_i([k]) = \{A \subseteq [k] \mid \#A = i\}$, o primeiro membro da igualdade é $\binom{k}{i} = \#\mathcal{P}_i([k])$. Por outro lado, tem-se

$$\mathcal{P}_i([k]) = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3 \dot\cup B_4$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1, 2 \notin A \,\}\\
B_2 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1 \in A,\ 2 \notin A \,\}\\
B_3 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 2 \in A,\ 1 \notin A \,\}\\
B_4 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1, 2 \in A \,\}
\end{aligned}$$

e $\#B_1 = \binom{k-2}{i}$ = número de subconjuntos de $[k] \setminus \{1,2\}$ com i elementos, $\#B_2 = \#B_3 = \binom{k-2}{i-1}$ = número de subconjuntos de $[k] \setminus \{1,2\}$ com $i-1$ elementos, $\#B_4 = \binom{k-2}{i-2}$ = número de subconjuntos de $[k] \setminus \{1,2\}$ com $i-2$ elementos. Segue-se que $\binom{k}{i} = \binom{k-2}{i} + 2\binom{k-2}{i-1} + \binom{k-2}{i-2}$.

b) Como em a) temos que:

$$\mathcal{P}_i([k]) = \{A \subseteq [k] \mid \#A = i\} = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3 \dot\cup B_4 \dot\cup B_5 \dot\cup B_6 \dot\cup B_7 \dot\cup B_8,$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1,2,3 \notin A \,\} \\
B_2 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1 \in A,\ 2,3 \notin A \,\} \\
B_3 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 2 \in A,\ 1,3 \notin A \,\} \\
B_4 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 3 \in A,\ 1,2 \notin A \,\} \\
B_5 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1,2 \in A,\ 3 \notin A \,\} \\
B_6 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1,3 \in A,\ 2 \notin A \,\} \\
B_7 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 2,3 \in A,\ 1 \notin A \,\} \\
B_8 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon 1,2,3 \in A \,\}.
\end{aligned}$$

Com um argumento análogo, $\#B_1 = \binom{k-3}{i}$, $\#B_2 = \#B_3 = \#B_4 = \binom{k-3}{i-1}$, $\#B_5 = \#B_6 = \#B_7 = \binom{k-3}{i-2}$, $\#B_8 = \binom{k-3}{i-3}$. Segue-se que

$$\binom{k}{i} = \binom{k-3}{i} + 3\binom{k-3}{i-1} + 3\binom{k-3}{i-2} + \binom{k-3}{i-3}.$$

10. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} && \text{(Lei da Simetria)} \\
&= \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}. && \text{(Convolução de Vandermonde)}
\end{aligned}$$

11. Como

$$(2x+3y+4z)^7 = \sum_{\substack{0 \le i,j,k \le 7 \\ i+j+k=7}} \binom{7}{i,j,k} (2x)^i (3y)^j (4z)^k = \sum_{\substack{0 \le i,j,k \le 7 \\ i+j+k=7}} \frac{7!}{i!j!k!} (2x)^i (3y)^j (4z)^k,$$

x^4y^2z ocorrerá quando $i = 4$, $j = 2$, $k = 1$. Portanto o coeficiente pedido é

$$\frac{7!}{4!2!1!} 2^4 \cdot 3^2 \cdot 4 = \frac{7!}{2!} 4! = 7! \cdot 12.$$

12.

a) Usando a Lei da Mudança de Variável, obtemos

$$\sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#S} = \sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#(X \setminus S)} = \sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#X - \#S} = (-1)^{\#X} \sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#S},$$

uma vez que $(-1)^{-\#S} = (-1)^{\#S}$. Deste modo, como $\#X$ é ímpar, temos $(-1)^{\#X} = -1$ e, portanto,

$$2\sum_{S\subseteq X}(-1)^{\#S} = 0,$$

de onde vem

$$\sum_{S\subseteq X}(-1)^{\#S} = 0.$$

b) De acordo com a sugestão, fixemos $a \in X$. Temos

$$\sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\in X}}(-1)^{\#S} = \sum_{S\subseteq X\setminus\{a\}}(-1)^{\#(S\cup\{a\})} = \sum_{S\subseteq X\setminus\{a\}}(-1)^{\#S+1} = -\sum_{S\subseteq X\setminus\{a\}}(-1)^{\#S}.$$

Agora, pela Lei da Decomposição,

$$\sum_{S\subseteq X}(-1)^{\#S} = \sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\notin X}}(-1)^{\#S} + \sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\in X}}(-1)^{\#S}.$$

Como

$$\sum_{\substack{S\subseteq X\\ a\notin X}}(-1)^{\#S} = \sum_{S\subseteq X\setminus\{a\}}(-1)^{\#S},$$

concluímos que

$$\sum_{S\subseteq X}(-1)^{\#S} = \sum_{S\subseteq X\setminus\{a\}}(-1)^{\#S} - \sum_{S\subseteq X\setminus\{a\}}(-1)^{\#S} = 0.$$

FIM