

Matemática Finita - Código 1342

Relatório do 2º Teste Formativo

1. FALSO. Com efeito, para $n = 2$, $\sum_{i=0}^2 i^3 = 0 + 1 + 8 = 9 \neq 15 = (0 + 1 + 4)(0 + 1 + 2) = (\sum_{i=0}^2 i^2)(\sum_{i=0}^2 i)$.

2. VERDADEIRO. Tem-se,

$$\sum_{k=2n}^{3n} \binom{k-n}{n} \underset{k \sim k+2n}{=} \sum_{k=0}^n \binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^n \frac{(k+n)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (k+n)^n.$$

3. A resposta é $n^2 + n$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 2 &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \| j \geq i \| = 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \| i \leq j \| \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j 1 = 2 \sum_{j=1}^n j = 2 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) = n^2 + n. \end{aligned}$$

Alternativa: Poderíamos chegar ao mesmo resultado sem recorrer à notação de Iverson:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 2 &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 1 = 2 \sum_{i=1}^n (n-i+1) = 2(n+1) \sum_{i=1}^n 1 - 2 \sum_{i=1}^n i \\ &= 2(n+1)n - 2 \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)n = n^2 + n. \end{aligned}$$

4. A resposta é $\frac{A(t)}{1-t^2}$. Com efeito:

$$\frac{A(t)}{1-t^2} = \frac{1}{1-t^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right),$$

onde $c_n = 0$ para n ímpar e $c_n = 1$ para n par. Se chamarmos b_n ao coeficiente de t^n da série produto que temos vindo a analisar, sabemos que $b_n = \sum_{r=0}^n c_r a_{n-r}$. Se n for par da forma $n = 2k$ ficamos com

$$b_{2k} = \sum_{r=0}^{2k} c_r a_{2k-r} \underset{r \sim 2j}{=} \sum_{j=0}^k a_{2k-2j} \underset{j \sim k-i}{=} \sum_{i=0}^k a_{2i}.$$

Se n for ímpar da forma $n = 2k + 1$ ficamos com

$$b_{2k+1} = \sum_{r=0}^{2k+1} c_r a_{2k+1-r} \underset{r \rightsquigarrow 2j}{=} \sum_{j=0}^k a_{2k+1-2j} \underset{j \rightsquigarrow k-i}{=} \sum_{i=0}^k a_{2i+1}.$$

5. a) Por indução em n . O caso base em que n é 1 dá como resultado no somatório o valor $(-1)^2 1^2 + (-1)^3 2^2 = -3$. O lado direito da igualdade do enunciado quando n é 1 também dá resultado -3 . Admitamos agora, por hipótese de indução, que a igualdade se verifica para n , com vista a argumentá-la para $n + 1$. Temos, pois, que argumentar que $\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} k^2 = -(n+1)(2n+3)$. Ora:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 + (-1)^{2n+2} (2n+1)^2 + (-1)^{2n+3} (2n+2)^2 \\ &\stackrel{\text{(hip. ind.)}}{=} -n(2n+1) + (2n+1)^2 - (2n+2)^2 \\ &= (2n+1)(2n+1-n) - (2(n+1))^2 = (2n+1)(n+1) - 4(n+1)^2 \\ &= (n+1)(2n+1-4n-4) = (n+1)(-2n-3) = -(n+1)(2n+3). \end{aligned}$$

b) O conjunto $[2n]$ é a união disjunta dos conjuntos $P = \{2, 4, \dots, 2n\}$ e $I = \{1, 3, \dots, 2n-1\}$ e podemos usar a lei da decomposição:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k^2 &= \sum_{k \in P} (-1)^{k+1} k^2 + \sum_{k \in I} (-1)^{k+1} k^2 \\ &\stackrel{\text{(mud. de variável)}}{=} \sum_{i=1}^n -(2i)^2 + \sum_{i=1}^n (2i-1)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (-4i^2 + 4i^2 - 4i + 1) = -4 \left(\sum_{i=1}^n i \right) + n = -4 \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= -2n(n+1) + n = -n(2n+2-1) = -n(2n+1). \end{aligned}$$

6. a) Adoptando as notações do exercício 17 da página 133, sejam

$$\square = [n] \times [n], \quad \triangle^- = \{(i, j) \in \square : i < j\},$$

$$\triangle^+ = \{(i, j) \in \square : i > j\}, \quad D = \{(i, j) \in \square : i = j\}.$$

Tem-se

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i \cdot j} = \sum_{(i,j) \in \square} \frac{1}{i \cdot j} \quad (\text{lei da decomp.}) \quad \sum_{(i,j) \in \triangle^+} \frac{1}{i \cdot j} + \sum_{(i,j) \in \triangle^-} \frac{1}{i \cdot j} + \sum_{(i,j) \in D} \frac{1}{i \cdot j}.$$

Ora,

$$\sum_{(i,j) \in \triangle^+} \frac{1}{i \cdot j} = \sum_{(i,j) \in \triangle^-} \frac{1}{i \cdot j},$$

pois a aplicação $(i, j) \mapsto (j, i)$ é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos Δ^+ e Δ^- e a fração $\frac{1}{i \cdot j}$ é simétrica em i e j . Por outro lado,

$$\sum_{(i,j) \in D} \frac{1}{i \cdot j} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = H_n^{(2)}.$$

Segue-se destas considerações que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i \cdot j} = 2 \sum_{(i,j) \in \Delta^+} \frac{1}{i \cdot j} + H_n^{(2)} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{i \cdot j} + H_n^{(2)}.$$

b) Por um lado,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i \cdot j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i} \frac{1}{j} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \right) = H_n H_n = (H_n)^2.$$

Por outro lado,

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{i \cdot j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{i \cdot j} + \sum_{(i,j) \in D} \frac{1}{i \cdot j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{i \cdot j} + H_n^{(2)}.$$

Logo, pela igualdade da alínea anterior,

$$(H_n)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{i \cdot j} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{i \cdot j} + H_n^{(2)} = 2 \left(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{i \cdot j} - H_n^{(2)} \right) + H_n^{(2)}$$

e, portanto,

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{i \cdot j} = \frac{1}{2} (H_n^{(2)} + (H_n)^2)$$

como se pretendia.

7. a) $(k+1)^3 - k^2 = (k+1)k(k-1) - k(k-1) = k(k-1)(k+1-1) = k^2(k-1).$

b) Utilizando o método das anti-diferenças (consulte a tabela da página 129), vem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2(k-1) &= \sum_{k=0}^n (k+1)^3 - \sum_{k=0}^n k^2 \quad (\text{mud. de variável}) \sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^n k^2 \\ &= \frac{k^4}{4} \Big|_1^{n+2} - \frac{k^3}{3} \Big|_0^{n+1} = \left(\frac{(n+2)^4}{4} - 0 \right) - \left(\frac{(n+1)^3}{3} - 0 \right) \\ &= \frac{(n+2)(n+1)^3}{4} - \frac{(n+1)^3}{3} = (n+1)^3 \left(\frac{n+2}{4} - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Reduzindo a um denominador comum, ficamos com a resposta $\frac{1}{12}(n+1)^3(3n+2)$.

c) Temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n i(n-1-i)(n-i) &\underset{i \sim n-k}{=} \sum_{k=0}^n (n-k)(k-1)k = \sum_{k=0}^n n(k-1)k - \sum_{k=0}^n k^2(k-1) \\
&\stackrel{\text{b)}{=} nk^2 - \frac{1}{12}(n+1)^3(3n+2) \\
&= n \frac{k^3}{3} \Big|_0^{n+1} - \frac{1}{12}(n+1)^3(3n+2) \\
&= n \left(\frac{(n+1)^3}{3} - 0 \right) - \frac{1}{12}(n+1)^3(3n+2) \\
&= \frac{1}{12}(n+1)^3(4n-3n-2) = \frac{1}{12}(n+1)^3(n-2).
\end{aligned}$$

8. Temos:

$$\begin{aligned}
x_n &= 2^n - x_{n-1} = 2^n - (2^{n-1} - x_{n-2}) \\
&= 2^n - 2^{n-1} + x_{n-2} = 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - x_{n-3} \\
&= 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - 2^{n-3} + x_{n-4} = \dots \\
&= 2^n - 2^{n-1} + 2^{n-2} - 2^{n-3} + \dots + (-1)^n x_0 \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i 2^{n-i} \underset{i \sim n-k}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} 2^k = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-2)^k \\
&= (-1)^n \frac{(-2)^k}{-3} \Big|_0^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{3} ((-2)^{n+1} - 1) = \frac{1}{3} (2^{n+1} + (-1)^n).
\end{aligned}$$

9. a) Estando-se no estado 2, há duas possibilidades de ir para o estado 1 e três possibilidades de obter directamente a solução (i.e., ir para o estado 0). Logo, $a_2 = 2a_1 + 3 = 7$.

b) Claramente, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ ($n \geq 3$). O polinómio característico desta fórmula de recorrência é $p(t) = t^2 - 2t - 3$, cujas soluções são -1 e 3 . Logo, a_n é da forma $a_n = \alpha(-1)^n + \beta 3^n$. Calculam-se os valores das incógnitas de modo a que $a_1 = 2$ e $a_2 = 7$. Ficamos com o sistema: $-\alpha + 3\beta = 2$ e $\alpha + 9\beta = 7$, cuja solução é $\alpha = \frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{3}{4}$. Logo, $a_n = \frac{1}{4}(3^{n+1} + (-1)^n)$.

10. Seja $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ a função geradora associada à sucessão que é solução da relação de recorrência. Note que o polinómio característico deste relação de recorrência é

$$p(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
A(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n t^n = 1 + 6t + 28t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3})t^n \\
&= 1 + 6t + 28t^2 + 6t \left(\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-1} t^{n-1} \right) - 12t^2 \left(\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-2} t^{n-2} \right) + 8t^3 \left(\sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} t^{n-3} \right) \\
&= 1 + 6t + 28t^2 + 6t \left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n \right) - 12t^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n \right) + 8t^3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) \\
&= 1 + 6t + 28t^2 + 6t(A(t) - 1 - 6t) - 12t^2(A(t) - 1) + 8t^3 A(t) \\
&= 1 + 6t + 28t^2 - 6t - 36t^2 + 12t^2 + A(t)(6t - 12t^2 + 8t^3) \\
&= 1 + 4t^2 + A(t)(6t - 12t^2 + 8t^3).
\end{aligned}$$

Logo, $A(t)(1 - 6t + 12t^2 - 8t^3) = 1 + 4t^2$. Donde se conclui que

$$A(t) = \frac{1 + 4t^2}{1 - 6t + 12t^2 - 8t^3} = \frac{1 + 4t^2}{(1 - 2t)^3}.$$

Pelo teorema das funções parciais (versão da página 219), sabemos que existem valores α , β e γ tais que

$$A(t) = \frac{1 + 4t^2}{(1 - 2t)^3} = \frac{\alpha}{1 - 2t} + \frac{\beta}{(1 - 2t)^2} + \frac{\gamma}{(1 - 2t)^3}.$$

Fazendo uns cálculos simples, obtemos $\alpha = 1$, $\beta = -2$ e $\gamma = 2$. Vem:

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{1}{1 - 2t} - \frac{2}{(1 - 2t)^2} + \frac{2}{(1 - 2t)^3} \\
&\stackrel{\text{(ver pág. 210)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 2^n t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) 2^{n-1} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (1 - 2(n+1) + (n+2)(n+1)) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (1 + n + n^2) t^n.
\end{aligned}$$

Logo, $a_n = 2^n(1 + n + n^2)$.

11. Ao dividirmos o polinómio $t^2 - 3t - 10$ pelo polinómio $t - 1$ obtemos cociente $t - 2$ e resto -12 . Assim: $t^2 - 3t - 10 = (t - 1)(t - 2) - 12$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{t^2 - 3t - 10}{t - 1} &= \frac{(t - 1)(t - 2) - 12}{t - 1} = t - 2 - \frac{12}{t - 1} = -2 + t + \frac{12}{1 - t} \\
&= -2 + t + 12 \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 10 + 13t + \sum_{n=2}^{\infty} 12t^n.
\end{aligned}$$

12. Em primeiro lugar vamos pôr a série dada na forma duma fração racional. Ora,

$$n^2 + 4n + 2 = (n+2)^2 - 2 = (n+2)((n+1)+1) - 2 = (n+2)(n+1) + (n+1) - 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 2)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t^n \\
&\stackrel{\text{(veja pág. 210)}}{=} \frac{2}{(1-t)^3} + \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} \\
&= \frac{2 + (1-t) - (1-t)^2}{(1-t)^3} = \frac{2 + t - t^2}{1 - 3t + 3t^2 - t^3}.
\end{aligned}$$

Logo, a série inversa de que estamos à procura tem $\frac{1-3t+3t^2-t^3}{2+t-t^2}$ como função racional. Vamos agora calcular a série formal desta fração racional. Fazendo a divisão com resto dos polinómios numerador e denominador, obtemos a igualdade $1 - 3t + 3t^2 - t^3 = (2 + t - t^2)(t - 2) + 5 - 3t$. Logo,

$$\frac{1 - 3t + 3t^2 - t^3}{2 + t - t^2} = -2 + t + \frac{5 - 3t}{2 + t - t^2}.$$

Ora, $2 + t - t^2 = -(t + 1)(t - 2)$. Logo, pelo teorema das fracções parciais, sabemos que existem constantes α e β tais que

$$\frac{5 - 3t}{2 + t - t^2} = \frac{\alpha}{t + 1} + \frac{\beta}{t - 2}.$$

Efectuando uns pequenos cálculos, vem $\alpha = \frac{8}{3}$ e $\beta = \frac{1}{3}$. Donde,

$$\begin{aligned}
\frac{5 - 3t}{2 + t - t^2} &= \frac{1}{3} \left(\frac{8}{1+t} - \frac{1}{2-t} \right) = \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} \right) \\
&= \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2} \right)^n = \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(8(-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}} \right) t^n = \frac{5}{2} - \frac{11}{4}t + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(8(-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}} \right) t^n.
\end{aligned}$$

A série inversa de que estamos à procura é, portanto,

$$-2 + t + \frac{5}{2} - \frac{11}{4}t + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(8(-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}} \right) t^n = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}t + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(8(-1)^n - \frac{1}{2^{n+1}} \right) t^n.$$

FIM