Matemática Finita

Exame de 1.ª Época 2002/03 (15/5/2003)

I

Em cada questão são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. O coeficiente de xy^2z^3 no desenvolvimento de $(x+2y+3z)^6$ é igual a:

- ☐ **a)** $\frac{6!}{2!3!}$.
- ☐ **b)** $6!3^2$.
- ☐ **c)** $\frac{6!}{2!}$.
- ☐ **d)** $\frac{6!}{2!3!}2^3 3^2$.

2. Sejam X e Y dois conjuntos não vazios e $a \in X$. Relativamente aos conjuntos $(X \times \{a\}) \times Y$ e $X \times Y$ podemos afirmar:

- ☐ **a)** Existe uma função bijectiva de $(X \times \{a\}) \times Y$ para $X \times Y$.
- ☐ **b)** Existe uma função injectiva, mas não sobrejectiva, de $(X \times \{a\}) \times Y$ para $X \times Y$.
- ☐ **c)** Existe uma função sobrejectiva, mas não injectiva, de $(X \times \{a\}) \times Y$ para $X \times Y$.
- ☐ **d)** Os dados não são conclusivos (dependem se $a \in Y$ ou se $a \notin Y$).

3. Relativamente à sucessão $\langle u_n \rangle$, $u_n = 7^n - 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, considere as seguintes afirmações:

i. *Cada termo* u_n *da sucessão é um múltiplo de 5*

ii. $\langle u_n \rangle$ *coincide com a sucessão* $\langle v_n \rangle$ *definida por* $v_0 = 0$, $v_1 = 5$, $v_2 = 45$, $v_n = 9v_{n-1} - 14v_{n-2}, n \geq 3$

Tem-se que:

☐ **a)** Ambas as afirmações são falsas.

☐ **b)** A afirmação *i* é verdadeira, mas a afirmação *ii* é falsa.

☐ **c)** A afirmação *ii* é verdadeira, mas a afirmação *i* é falsa.

☐ **d)** Ambas as afirmações são verdadeiras.

4. O polinómio característico da fórmula de recorrência

$$x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$$

é igual a

☐ **a)** $t^2 - 6t + 5$.

☐ **b)** $t^2 + 5t - 6$.

☐ **c)** $t^2 - 5t + 6$.

☐ **d)** $t^2 + 6t - 5$.

II

Justifique todos os cálculos efectuados e as respostas apresentadas.

5. Quantas sequências binárias de comprimento $2n$ é que existem ...

5.1. ... em que o número de zeros é igual ao número de uns? Justifique.

5.2. ... em que nas n primeiras entradas apenas aparece o 1? Justifique.

6. Um saco contém n bolas brancas. Dadas k caixas diferentes, $k > n$, indique, justificando, de quantas maneiras se pode distribuir as n bolas pelas k caixas, de modo que em cada caixa só possa ficar quanto muito uma bola.

7. Seja $m \in \mathbb{Z}$.

7.1. Mostre que

$$\sum_{k=0}^{n} m^{k+1} \binom{n+1}{k+1} = (m+1)^{n+1} - 1$$

por recurso à fórmula da soma por partes.
[*Para o caso de necessitar:* $\Delta\left(\frac{m^k}{m-1}\right) = m^k$, $m \neq 1$.]

7.2. Utilize o resultado da alínea anterior para provar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{n}{n+1}.$$

8. Para cada número natural $n \geq 1$ considere a soma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k}.$$

8.1. Prove que S_n satisfaz a fórmula de recorrência

$$S_n = S_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

[*Sugestão: Comece por utilizar a lei de Pascal.*]

8.2. Mostre que S_n coincide com o n-ésimo número harmónico $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ por recurso...

8.2.1. ... ao método de indução matemática.

8.2.2. ... ao método telescópico.

9. Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas sucessões definidas recursivamente pelo sistema

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 4b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 6b_{n-1} - 3^{n-1} \end{cases} \quad , \ n \geq 1,$$

e pelas condições iniciais $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

9.1. Verifique que $a_n = 9a_{n-1} - 14a_{n-2} - 4 \times 3^{n-2}$ para todo o $n \geq 2$.

9.2. Determine uma forma fechada para a função geradora da sucessão $\langle a_n \rangle$.

9.3. Determine o termo geral das sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$.

10. Sejam $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ uma série formal invertível e $A(t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ a série formal inversa de $A(t)$. Determine uma relação entre os termos gerais das sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$.