

# Matemática Finita

EXAME DE 1.<sup>a</sup> ÉPOCA 2001/02 (28/6/2002)

---

## I

Em cada questão são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando  $\times$  no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. A partição conjugada de  $5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$  é:

a)  $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5$

b)  $5 + 4 + 4 + 3 + 2$

c)  $7 + 5 + 3 + 2 + 1$

d)  $1 + 2 + 3 + 5 + 7$

2. O coeficiente de  $x^6$  no desenvolvimento de  $(4x + 8)^8$  é:

a)  $\binom{8}{6}$

b)  $4\binom{8}{6}$

c)  $4^8\binom{8}{6}$

d)  $4^6 8^2\binom{8}{6}$

3. Dados  $0 \leq k < n$ , a soma

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

não é igual a

- a)  $\binom{n+1}{k+1}$
- b)  $\binom{n+1}{k}$
- c)  $\binom{n+1}{n-k}$
- d)  $\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$

4. Para  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$A(t) = (2 - t)^m$$

é a função geradora da sucessão  $\langle a_n \rangle$  para

- a)  $a_n = \binom{m}{n} (-2)^{-n}$  se  $0 \leq n \leq m$  e  $a_n = 0$  se  $n > m$
- b)  $a_n = \binom{m}{n} (-1)^n (-2)^{m-n}$  se  $0 \leq n \leq m$  e  $a_n = 0$  se  $n > m$
- c)  $a_n = \binom{m}{n} (-2)^n$  se  $0 \leq n \leq m$  e  $a_n = 0$  se  $n > m$
- d)  $a_n = \binom{m}{n} (-1)^n 2^{m-n}$  se  $0 \leq n \leq m$  e  $a_n = 0$  se  $n > m$

## II

Justifique todos os cálculos efectuados e as respostas apresentadas.

5. Considere um baralho de 40 cartas.

5.1. Quantas mãos de 5 cartas é que existem?

5.2. E quantas mãos de 5 cinco cartas com exactamente duas espadas é que existem?

6. Dado  $n > 1$ , mostre que

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$$

por recurso...

6.1. ... ao binómio de Newton.

6.2. ... ao método telescópico.

[Sugestão: Comece por verificar que  $\Delta \left( (-1)^{k-1} n \binom{n-2}{k-2} \right) = (-1)^k k \binom{n}{k}$   
para todo  $2 \leq k \leq n-1$ .]

7. Seja  $X$  um conjunto de cardinalidade  $n$ .

7.1. Prove que

$$\sum_{S \subseteq X} (-1)^{\#S} \#S = \sum_{k=1}^n (-1)^k k \binom{n}{k}$$

7.2. Supondo que  $X$  tem mais do que um elemento, mostre que

$$\sum_{S \subseteq X \times X} (-1)^{\#S} \#S = 0$$

8. Seja  $\langle a_n \rangle$  a solução da relação de recorrência

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

com condições iniciais  $x_0 = 0$  e  $x_1 = 1$ .

8.1. Por recurso ao método de indução matemática, prove que

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

8.2. Utilizando a alínea anterior, determine o termo geral da sucessão  $\langle a_n \rangle$ .

8.3. Confira o resultado obtido na alínea anterior por recurso ao método do polinómio característico.

9. Aplique o método das funções geradoras para determinar o termo geral da sucessão  $\langle a_n \rangle$  definida por  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  e

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

10. Considere duas sucessões  $\langle a_n \rangle$  e  $\langle b_n \rangle$  tais que

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 3^n, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N},$$

e as séries formais

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n.$$

Determine uma forma fechada para a série formal  $A(t^2)B(t^2)$ .