# Matemática Finita

25 de Setembro de 2001

## Para a resolução do exame, aconselha-se que:

- Verifique o exemplar do exame que lhe foi entregue e, no caso de estar incompleto ou com qualquer deficiência, dirija-se ao professor vigilante. O exame é composto por duas partes: a primeira com 4 questões de escolha múltipla e a segunda com 6 questões que devem estar devidamente justificadas. O exame contém 8 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Não rubrique nem escreva o seu nome nas folhas de exame, excepto no local apropriado para o efeito.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas. Não é permitido o uso de máquina de calcular.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração de 2 horas e 30 minutos.

## Critérios de avaliação e cotação:

- Com excepção da primeira parte (constituída por quatro questões de escolha múltipla) terá de justificar todas as respostas e apresentar os cálculos que efectuou. Se apresentar apenas um valor numérico como resposta sem qualquer justificação, mesmo que esteja correcto, terá cotação zero.
- Cada questão da primeira parte tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima desta parte é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

| 5. | | | 6. | | 7. | | 8. | | | 9. | 10. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | b) | c) | a) | b) | a) | b) | a) | b) | c) | | a) | b) |
| 0,5 | 1,0 | 1,5 | 1,0 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 0,5 | 1,5 | 1,0 | 2,0 | 1,0 | 1,5 |

## I

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) está correcta. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma das suas respostas, basta escrever "Anulado" junto a essa resposta e indicar, se for caso disso, a que pretenda que seja considerada.

**1.** Se $X$ é um conjunto com cardinalidade $n$ então $\#(X \times \{a\})$ é igual a:

☐ **a)** $n$

☐ **b)** $2n$

☐ **c)** $n+1$ se $a \notin X$

☐ **d)** $n-1$ se $a \in X$

**2.** O coeficiente de $x^2yz^2$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^5$ é:

☐ **a)** 30

☐ **b)** $\binom{5}{2}\binom{5}{1}\binom{5}{2}$

☐ **c)** $\binom{5}{2}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$

☐ **d)** 1

**3.** A soma $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{i}$ é igual a:

☐ **a)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n+i}{n-i}$

☐ **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{\binom{i}{n+i}}$

☐ **c)** $\sum_{i=0}^{n} 2^{n+i}$

☐ **d)** $\sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n}$

**4.** Qual é o coeficiente de $t^n$ no produto $\frac{1}{t^2-4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\,t^n\right)^{-1}$?

☐ **a)** $-(1/2)^{n+1}$

☐ **b)** $(1/2)^{n+1}$

☐ **c)** $-(-1/2)^{n+1}$

☐ **d)** $(-1/2)^{n+1}$

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

## II

**5.** Considere 3 dados distintos (um verde, um azul e um amarelo, por exemplo).

**a)** Quantos resultados diferentes é que existem se se atirarem os três dados?

**b)** E quantos são os resultados em que saem exactamente dois números iguais?

**c)** Resolva a alínea anterior para seis dados diferentes, em vez de três.

**6.** Considere 4 sacos distintos e 20 bolas. Quantas são as maneiras de distribuir as bolas pelos sacos supondo que . . .

**a)** . . . as bolas são todas distintas?

**b)** . . . as bolas são todas iguais?

**7.** Mostre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \ldots$

**a)** ... pelo método telescópico.

**b)** ... pelo método de indução matemática.

**8.** Seja $a_n$ o número de todas as sequências distintas de comprimento $n$ formadas com os algarismos 0, 1, 2, nas quais 1 só pode aparecer num bloco 10 e 2 só pode aparecer num bloco 20.

**a)** Determine $a_0$, $a_1$ e $a_2$.

**b)** Mostre que a sucessão $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ é uma solução da relação de recorrência $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$.

**c)** Explicite o termo geral $a_n$ recorrendo ao método do polinómio característico.

**9.** Aplique o método das funções geradoras para determinar o termo geral da solução da relação de recorrência $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, com $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$.

**10.** Considere duas sucessões $\langle a_n \rangle$, $\langle b_n \rangle$ tais que $n+1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ e considere as séries formais $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$.

**a)** Indique uma forma fechada para a série formal $A(t)B(t)$.

**b)** Supondo que $a_n = 2^n + n$ determine uma forma fechada para a série $B(t)$.

FIM