Para a resolução do exame, aconselha-se que:

- Verifique o exemplar do exame que lhe foi entregue e, no caso de estar incompleto ou com qualquer deficiência, dirija-se ao professor vigilante. O exame é composto por duas partes: a primeira com 4 questões de escolha múltipla e a segunda com 6 questões que devem estar devidamente justificadas. O exame contém 8 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Não rubrique nem escreva o seu nome nas folhas de exame, excepto no local apropriado para o efeito.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas. Não é permitido o uso de máquina de calcular.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração de 2 horas e 30 minutos.

Critérios de avaliação e cotação:

- Com excepção da primeira parte (constituída por quatro questões de escolha múltipla) terá de justificar todas as respostas e apresentar os cálculos que efectuou. Se apresentar apenas um valor numérico como resposta sem qualquer justificação, mesmo que esteja correcto, terá cotação zero.
- Cada questão da primeira parte tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima desta parte é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

5.			6.	7.		8.			9.	10.
a)	b)	c)		a)	b)	a)	b)	c)		
0,5	1,5	1,0	2,5	1,5	1,5	0,7	1,3	1,5	2,5	1,5

I

Em cada questão apenas uma das afirmações a), b), c), d) está correcta. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma das suas respostas, basta escrever "Anulado" junto a essa resposta e indicar, se for caso disso, a que pretenda que seja considerada.

1. A partição conjugada de $4+3+2+2+1$ é:

- ☐ **a)** $1+2+2+3+4$
- ☐ **b)** $4+3+2+2+1$
- ☐ **c)** $5+4+2+1$
- ☐ **d)** $1+2+4+5$

2. O coeficiente de t^3 na soma $\displaystyle\sum_{S\subseteq[4]}\sum_{a\in[4]\setminus S} t^{\#(S\cup\{a\})}$ é:

- ☐ **a)** 1
- ☐ **b)** $\binom{4}{2}\cdot 2$
- ☐ **c)** 2
- ☐ **d)** $\binom{4}{2}$

3. A dedução

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sum_{j=1}^{i} i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{i}=n$$

tem um único erro e este encontra-se na:

- ☐ **a)** Primeira igualdade.
- ☐ **b)** Segunda igualdade.

☐ **c)** Terceira igualdade.

☐ **d)** Quarta igualdade.

4. Considere a fórmula de recorrência $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$, $n \geq 2$. Então a sucessão:

☐ **a)** $\langle 3^n - 2^n \rangle$ é solução

☐ **b)** $\langle (1/3)^n - (1/2)^n \rangle$ é solução

☐ **c)** $\langle 2^n + 1 \rangle$ é solução

☐ **d)** $\langle (1/2)^n + 1 \rangle$ é solução

$\boxed{\text{Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.}}$

II

5. Sejam X e Y conjuntos disjuntos com $\#X = \#Y = n$.

a) Calcule $\#(X \cup Y)$.

b) Mostre que o número de subconjuntos de $X \cup Y$ com n elementos é $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

[SUGESTÃO: Suponha, por exemplo, que X é um conjunto de raparigas e que Y é um conjunto de rapazes.]

c) Usando as alíneas anteriores, deduza que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

6. Considere 6 crianças que designaremos pelas letras A, B, C, D, E, F. De quantas maneiras as podemos sentar numa fila de modo a que nem A e B, nem C e D, nem E e F fiquem juntas?

7. **a)** Calcule a soma $\sum_{i=0}^{n} i2^i$ pelo método da perturbação.

b) Usando a alínea anterior, calcule a soma $\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} i \binom{i}{j}$.

8. Considere a relação de recorrência, $x_n = 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$, $n \geq 3$, sujeita às condições iniciais $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$.

a) Determine os termos x_4, x_5 e x_6.

b) Sabendo que a solução $\langle a_n \rangle$ tem a forma $a_n = 2^{n-1} + f(n)$ para todo n, conjecture uma fórmula para a_n.

c) Prove, por indução matemática, que a fórmula que conjecturou na alínea anterior está correcta.

9. Aplique o método das funções geradoras para determinar o termo geral da solução da relação de recorrência $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} + 2^n$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$.

10. Considere a série formal $A(t) = \dfrac{1}{1-2t}$. Justifique que $A(t^2)$ é invertível e determine o termo geral b_n da sucessão associada à série formal $B(t) = \dfrac{A(t^2)^{-1}}{1-t^2}$.

FIM